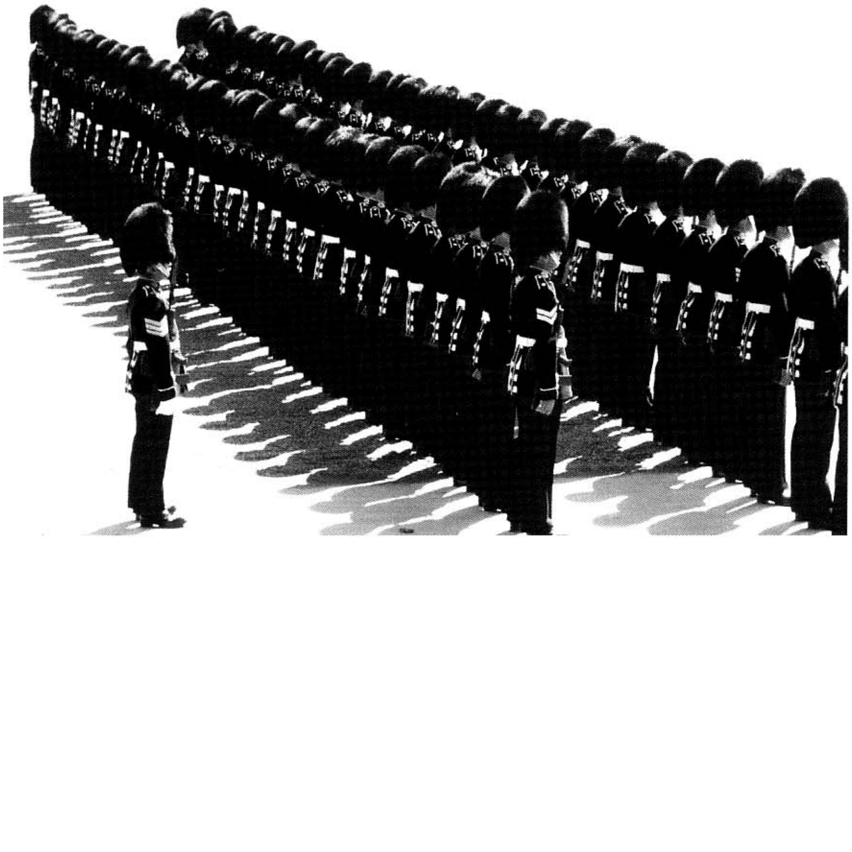
ALGEBRA
Lineare Gleichungen



Bearbeitungshinweise

Lernschritt
Übungen zum Lernschritt
Lösungen

Liebe Bearbeiterin, lieber Bearbeiter,

dieses Lernprogramm vermittelt Ihnen Lehrstoff ohne Lehrer und ohne fremde Hilfe. Von Seite zu Seite wird Ihnen der Lehrstoff in kleinen Schritten erläutert. Mit Übungsaufgaben wird das Gelernte wiederholt und gefestigt. Meistens können Sie Ihre Berechnungen direkt im Heft ausführen. Da manchmal der Platz dazu nicht reicht, sollten Sie sich etwas Schreibpapier zurechtlegen.

Die Lösungen der Übungsaufgaben finden Sie am Anfang der nächsten Seite. Wenn Sie Schwierigkeiten bei der Lösung einer Übungsaufgabe haben, sehen Sie sich die beiden letzten Seiten noch einmal an. Dort finden Sie sicher Hinweise, die Ihnen bei der Lösung helfen.

Versuchen Sie wirklich erst dann zum Lösungsteil weiterzugehen, wenn Sie mit den Übungsaufgaben einer Seite fertig sind oder wenn Sie sicher sind, dass Sie ohne fremde Hilfe nicht mehr weiterkommen.

Einen Taschenrechner sollten Sie bei diesem Lernprogramm möglichst **nicht** verwenden!

Sorgen Sie dafür, dass Sie ungestört arbeiten können: Lassen Sie sich Zeit und teilen Sie Ihre Zeit ein. Unser Vorschlag: alle 45 Minuten eine Pause.

Bearbeiten Sie immer nur die **rechte** Seite des Lernprogramms. Wenn Sie **am Ende des ersten Teils** angekommen sind, **drehen** Sie das Heft auf den Kopf. Danach bearbeiten Sie wieder nur die **rechte** Seite. Die Seiten sind fortlaufend nummeriert.

An einigen Stellen – bei den Verzweigungstests – können Sie, wenn Sie den entsprechenden Stoff schon beherrschen, einige Seiten überspringen.

Lineare Gleichungen – Einsetzungsverfahren

Betrachten Sie bitte die folgende Gleichung:

$x + y = 12$

Sie wissen, dass Sie diese Gleichung durch Umformen nach einer Variablen – nach x oder nach y – auflösen können:

$$\begin{aligned} x + y &= 12 \quad &|-y \\ x &= 12 - y \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} x + y &= 12 \quad &|-x \\ y &= 12 - x \end{aligned}$$

Durch die Umformung erhalten Sie
als Lösung für x den Term $12 - y$ oder als Lösung für y den Term $12 - x$.

Als Lösung erhalten Sie hier nur einen Zusammenhang zwischen x und y. Es wäre natürlich schöner, wenn sich als Lösung Zahlen finden ließen, die die Bedingung der Gleichung erfüllen!

Wenn Sie einmal darüber nachdenken, werden Sie erkennen, dass es ungezählte Zahlenpaare gibt, die miteinander addiert die Zahl 12 ergeben:

$$\begin{aligned} x &+ y &= 12 \\ 4 &+ 8 &= 12 \\ 2{,}9 &+ 9{,}1 &= 12 \\ \frac{17}{3} &+ \frac{19}{3} &= 12 \end{aligned}$$

Diese Überlegung bringt Sie einer eindeutigen Lösung der Gleichung nicht näher!

Wie sieht es aus, wenn eine der Variablen bekannt ist?

Nehmen wir an, der Variable x ist der Wert 5 zugeordnet:
Vorgabe: $x = 5$
Jetzt können wir diesen Wert für x in die erste Gleichung einsetzen:

$x + y = 12$

$\boxed{x = 5}$

$5 + y = 12$

Wir erhalten durch Umformung der Gleichung:

$$\begin{aligned} 5 + y &= 12 \quad &|-5 \\ y &= 12 - 5 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

Also: $x = 5$; $y = 7$

Lineare Gleichungen – Einsetzungsverfahren

Wir haben damit ausgerechnet, dass das Zahlenpaar x = 5 und y = 7 die Bedingung der Gleichung x + y = 12 erfüllen soll.

Diese Lösung wollen wir nun durch die Probe überprüfen!

Sie wissen: Bei der Probe wird die Lösung in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt und beide Seiten werden getrennt ausgerechnet. Ergibt sich auf beiden Seiten das Gleiche, so ist die Lösung richtig!

Probe:

(x – 5; y = 7)

$x + y \stackrel{?}{=} 12$

$5 + 7 \stackrel{?}{=} 12$

$12 \stackrel{?}{=} 12$ ✔

Wir haben richtig gerechnet: Die Lösung (x = 5; y = 7) erfüllt die Bedingung der Gleichung x + y = 12!

Lösen Sie die Gleichungen, indem Sie den vorgegebenen Wert einsetzen!
Machen Sie anschließend die Probe!

① Gleichung: $x \cdot y = 36$
Vorgabe: $x = 4$

② Gleichung: $x + 2y = 28$
Vorgabe: $x = 6$

③ Gleichung: $x - y = 26$
Vorgabe: $\mathbf{y} = 14$

Lineare Gleichungen – Einsetzungsverfahren

① Gleichung: $x \cdot y = 36$
Vorgabe: $x = 4$
eingesetzt: $4 \cdot y = 36 \quad | :4$
$y = 9$

Probe:
($x = 4$; $y = 9$)
$4 \cdot 9 \stackrel{?}{=} 36$
$36 \stackrel{?}{=} 36$ ✔

② Gleichung: $x + 2y = 28$
Vorgabe: $x = 6$
eingesetzt: $6 + 2y = 28 \quad | -6$
$2y = 22 \quad | :2$
$y = 11$

Probe:
($x = 6$; $y = 11$)
$6 + 2 \cdot 11 \stackrel{?}{=} 28$
$6 + 22 \stackrel{?}{=} 28$
$28 \stackrel{?}{=} 28$ ✔

③ Gleichung: $x - y = 26$
Vorgabe: $y = 14$
eingesetzt: $x - 14 = 26 \quad | +14$
$x = 40$

Probe:
($x = 40$; $y = 14$)
$40 - 14 \stackrel{?}{=} 26$
$26 \stackrel{?}{=} 26$ ✔

Sehen Sie sich noch einmal Aufgabe ③ an:

Gelöst wird die Gleichung $x - y = 26$
Aber auch der Ausdruck für den vorgegebenen Wert ist eine Gleichung: $y = 14$

Der Wert für y aus dieser zweiten Gleichung wird in die erste Gleichung statt y eingesetzt. So erhalten wir ein Zahlenpaar, das die Bedingung der ersten Gleichung erfüllt!

Da wir nun wissen, dass es sich bei beiden Ausdrücken um Gleichungen handelt, schreiben wir nicht mehr:
Gleichung: $x - y = 26$
Vorgabe: $y = 14$

Wir schreiben stattdessen 2 Gleichungen, die wir mit römischen Zahlen bezeichnen:

Gleichung Ⅰ $x - y = 26$ oder kurz: Ⅰ $x - y = 26$
Gleichung Ⅱ $y = 14$ Ⅱ $y = 14$

Solche zusammenhängenden Gleichungen, die eine gemeinsame Lösung haben, nennt man **Gleichungssystem**.

Lineare Gleichungen – Einsetzungsverfahren

In einem Gleichungssystem muss nicht einer der Variablen ein eindeutiger Zahlenwert zugeordnet sein ($x = 5$), sondern sie kann auch durch einen Zusammenhang mit der anderen Variablen (z.B. $x = 2y$) definiert sein!

Beispiel:

Ⓘ $x + y = 27$

Ⓘⓘ $x = 2y$

Hier ist x durch y definiert. Wenn wir die Gleichung für x (Gleichung Ⓘⓘ) in Gleichung Ⓘ einsetzen, erhalten wir die Lösung für die Variable y:

Ⓘⓘ in Ⓘ $2y + y = 27$

$3y = 27 \quad | :3$

$y = 9$

Dadurch haben wir jedoch noch keine eindeutige Lösung erhalten, denn wir wissen bislang nur: $y = 9$ und $x = 2y$.

Nun müssen wir noch den Zahlenwert für x bestimmen. Wir tun dies, indem wir den gerade erhaltenen Wert für y in eine der beiden Gleichungen einsetzen. Die Gleichung, in die wir einsetzen, können wir auswählen. Es empfiehlt sich, die einfachere – in unserem Fall Gleichung Ⓘⓘ – zu benutzen:

Ⓘⓘ $x = 2y$

$y = 9$ in Ⓘⓘ eingesetzt: $x = 2 \cdot 9$

$x = 18$

Also haben wir als Lösung dieses Gleichungssystems das Zahlenpaar $x = 18$ und $y = 9$ berechnet.

Überprüfen Sie die Lösung der Beispielaufgabe. Die Probe muss natürlich für beide Gleichungen gemacht werden!

Probe:
($x = 18$; $y = 9$)

Gleichung Ⓘ

$x + y \stackrel{?}{=} 27$

Gleichung Ⓘⓘ

Lernschritt

Übungen

Lineare Gleichungen – Einsetzungsverfahren

Probe: ($x = 18$; $y = 9$)

Gleichung Ⓘ

$x + y \stackrel{?}{=} 27$

$18 + 9 \stackrel{?}{=} 27$

$27 \stackrel{?}{=} 27$ ✔

Gleichung Ⓘⓘ

$x \stackrel{?}{=} 2y$

$18 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 9$

$18 \stackrel{?}{=} 18$ ✔

Die Probe ergibt für beide Gleichungen Gleichheit – die Lösung stimmt!

Das Verfahren, ein Gleichungssystem mit zwei Variablen auf die Weise zu berechnen, die Sie gerade kennen gelernt haben, wird **Einsetzungsverfahren** genannt. Hier noch einmal die einzelnen Verfahrensschritte:

- Zur Bestimmung von zwei Variablen benötigen wir **zwei** Gleichungen.

  Ⓘ $x + y = 20$
  Ⓘⓘ $x = 4y$

- Wir setzen den Wert einer Variablen, der durch eine Gleichung gegeben ist, in die andere Gleichung ein und erhalten den Wert der anderen Variable.

  Ⓘⓘ in Ⓘ $4y + y = 20$
  $5y = 20 \quad | : 5$
  $\mathbf{y = 4}$

- Den so erhaltenen Wert für eine Variable setzen wir in eine der beiden Gleichungen ein und erhalten den Wert der anderen Variablen.

  $y = 4$ in Ⓘⓘ $x = 4 \cdot 4$
  $\mathbf{x = 16}$

- Wir überprüfen die Lösung durch Probe in **beiden** Gleichungen. ($x = 16$; $y = 4$):

  Gleichung Ⓘ

  $x + y \stackrel{?}{=} 20$

  $16 + 4 \stackrel{?}{=} 20$

  $20 \stackrel{?}{=} 20$ ✔

  Gleichung Ⓘⓘ

  $x \stackrel{?}{=} 4y$

  $16 \stackrel{?}{=} 4 \cdot 4$

  $16 \stackrel{?}{=} 16$ ✔

Lösen Sie auch diese Gleichungssysteme nach dem Einsetzungsverfahren:

① Ⓘ $x + 16w = 38$
Ⓘⓘ $x = 3w$

② Ⓘ $3a - b = 10$
Ⓘⓘ $a = 7b$

① Ⅰ $x + 16w = 38$

Ⅱ $x = 3w$

Ⅱ in Ⅰ $3w + 16w = 38$

$19w = 38 \quad | :19$

$\mathbf{w = 2}$

in Ⅱ $x = 3 \cdot 2$

$\mathbf{x = 6}$

Probe: $(x = 6;\ w = 2)$

Gleichung Ⅰ	Gleichung Ⅱ
$6 + 16 \cdot 2 \stackrel{?}{=} 38$	$6 \stackrel{?}{=} 3 \cdot 2$
$6 + 32 \stackrel{?}{=} 38$	$6 \stackrel{?}{=} 6$ ✔
$38 \stackrel{?}{=} 38$ ✔	

② Ⅰ $3a - b = 10$

Ⅱ $a = 7b$

Ⅱ in Ⅰ $21b - b = 10$

$20b = 10 \quad | :20$

$\mathbf{b = \frac{10}{20}}$

$\mathbf{b = \frac{1}{2}}$

in Ⅱ $a = 7 \cdot \frac{1}{2}$

$\mathbf{a = \frac{7}{2}}$

Probe: $(a = \frac{7}{2};\ b = \frac{1}{2})$

Gleichung Ⅰ	Gleichung Ⅱ
$3 \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 10$	$\frac{7}{2} \stackrel{?}{=} 7 \cdot \frac{1}{2}$
$\frac{21}{2} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 10$	$\frac{7}{2} \stackrel{?}{=} \frac{7}{2}$ ✔
$\frac{20}{2} \stackrel{?}{=} 10$	
$10 \stackrel{?}{=} 10$ ✔	

Lineare Gleichungen – Einsetzungsverfahren

Das Einsetzungsverfahren kann man natürlich auch anwenden, wenn die Gleichungen Summen enthalten:

Ⓘ $2a + b = 13$
Ⓘⓘ $b = a - 5$

Einsetzen:
Ⓘⓘ in Ⓘ $2a + a - 5 = 13$

$$3a - 5 = 13 \quad | +5$$
$$3a = 18 \quad | :3$$
$$\mathbf{a = 6}$$

Einsetzen der Lösung für a in eine Gleichung:

in Ⓘⓘ eingesetzt: $b = 6 - 5$

$$\mathbf{b = 1}$$

Lösung des Gleichungssystems: $(a = 6; b = 1)$

Probe:	
Gleichung Ⓘ	Gleichung Ⓘⓘ
$2 \cdot 6 + 1 \stackrel{?}{=} 13$	$1 \stackrel{?}{=} 6 - 5$
$12 + 1 \stackrel{?}{=} 13$	$1 \stackrel{?}{=} 1$ ✔
$13 \stackrel{?}{=} 13$ ✔	

Das können Sie jetzt auch:

① Ⓘ $s + t = 9$
  Ⓘⓘ $t = 5 + s$

② Ⓘ $x + 3y + 1 = 0$
  Ⓘⓘ $y = 4x - 48$

Bitte denken Sie an die Probe!

Lineare Gleichungen – Einsetzungsverfahren

① Ⅰ $s + t = 9$

Ⅱ $t = 5 + s$

Ⅱ in Ⅰ $s + 5 + s = 9$

$$
\begin{aligned}
2s + 5 &= 9 \quad &| -5\\
2s &= 4 \quad &| :2\\
\mathbf{s} &\mathbf{= 2}
\end{aligned}
$$

in Ⅱ $t = 5 + 2$

$\mathbf{t = 7}$

Probe:

(s = 2; t = 7)

Gleichung Ⅰ	Gleichung Ⅱ
$2 + 7 \stackrel{?}{=} 9$	$7 \stackrel{?}{=} 5 + 2$
$9 \stackrel{?}{=} 9$ ✔	$7 \stackrel{?}{=} 7$ ✔

② Ⅰ $x + 3y + 1 = 0$

Ⅱ $y = 4x - 48$

Ⅱ in Ⅰ $x + 3(4x - 48) + 1 = 0$

$$
\begin{aligned}
x + 12x - 144 + 1 &= 0\\
13x - 143 &= 0 \quad &| +143\\
13x &= 143 \quad &| :13\\
\mathbf{x} &\mathbf{= 11}
\end{aligned}
$$

in Ⅱ $y = 4 \cdot 11 - 48$

$y = 44 - 48$

$\mathbf{y = -4}$

Probe: (x = 11; y = –4)

Gleichung Ⅰ

$11 + 3 \cdot (-4) + 1 \stackrel{?}{=} 0$

$11 - 12 + 1 \stackrel{?}{=} 0$

$-1 + 1 \stackrel{?}{=} 0$

$0 \stackrel{?}{=} 0$ ✔

Gleichung Ⅱ

$-4 \stackrel{?}{=} 4 \cdot 11 - 48$

$-4 \stackrel{?}{=} 44 - 48$

$-4 \stackrel{?}{=} -4$ ✔

Lineare Gleichungen – Einsetzungsverfahren

Sie können eine Gleichung nach dem Einsetzungsverfahren natürlich nur dann in eine zweite einsetzen, wenn eine Variable isoliert ist (z. B. $x = 3y + 6$).

Diese Gleichung: $2x - 4 = 4y + 2$

können Sie nicht direkt in eine andere einsetzen!

Sie können die Gleichung jedoch vorher umformen und damit eine Variable isolieren:

$$
\begin{aligned}
2x - 4 &= 4y + 2 \quad && | +4 \\
2x &= 4y + 6 && | :2 \\
x &= 2y + 3
\end{aligned}
$$

Nun kann dieser Ausdruck für x in eine andere Gleichung eingesetzt werden!

Liegt also in keiner der beiden Gleichungen eine Variable isoliert vor, lösen Sie eine Gleichung (die einfachere) durch Umformung nach einer Variablen auf. Dann kann sie in die andere Gleichung eingesetzt werden!

Welche Gleichung die einfachere ist, müssen Sie selbst entscheiden.
Auch hier gilt wieder: Erst alle Gleichungen genau anschauen!
Mit zunehmender Übung werden Sie ein „Näschen" dafür bekommen, welche Rechenreihenfolge die sinnvollste ist!

Hier ist z.B. ein Fall, bei dem Sie nicht einfach „drauflosrechnen" sollten:

I $16 - 2x = 4y + 8$
II $2x = 1 - 3y$

Haben Sie es bemerkt?
Richtig, hier muss in der zweiten Gleichung die Variable x nicht isoliert werden, da der Wert für 2x in der ersten Gleichung auch vorkommt! Sie können hier direkt den Wert für 2x, also $1 - 3y$ in die erste Gleichung einsetzen!

Jetzt können Sie die Beispielaufgabe leicht lösen:

I $16 - 2x = 4y + 8$
II $2x = 1 - 3y$

Lernschritt

Übungen

(I) $16 - 2x = 4y + 8$

(II) $2x = 1 - 3y$

> Hier muss wegen des Minuszeichens die Klammer gesetzt werden! Haben Sie daran gedacht?

$$
\begin{array}{llll}
\text{(II) in (I)} & 16 - (1 - 3y) & = 4y + 8 & \\
 & 16 - 1 + 3y & = 4y + 8 & \\
 & 15 + 3y & = 4y + 8 & | -8 \\
 & 7 + 3y & = 4y & | -3y \\
 & 7 & = y & \\
 & \mathbf{y} & \mathbf{= 7} & \\
\text{in (II)} & 2x & = 3 \cdot 7 - 1 & \\
 & 2x & = 20 & | :2 \\
 & \mathbf{x} & \mathbf{= 10} &
\end{array}
$$

Probe:
$(x = 10;\ y = 7)$

Gleichung (I)

$16 + 2 \cdot 10 \overset{?}{=} 4 \cdot 7 + 8$

$16 + 20 \overset{?}{=} 28 + 8$

$36 \overset{?}{=} 36$ ✔

Gleichung (II)

$2 \cdot 10 \overset{?}{=} 3 \cdot 7 - 1$

$20 \overset{?}{=} 20$ ✔

Manchmal erleichtern auch „trickreiche" Umformungen die Lösung erheblich.

Sehen Sie sich diese Aufgabe an:

(I) $8x + 6z = 54$

?

(II) $3x + 6 = 3z$

Betrachten Sie einmal die Variable z! Fällt Ihnen etwas auf?
Richtig: Wenn Sie die Gleichung (II) mit 2 multiplizieren, wird die rechte Seite zu 6z. Dies kann dann in Gleichung (I) eingesetzt werden:

(I) $8x + 6z = 54$

(II) $3x + 6 = 3z \quad | \cdot 2$

$6x + 12 = 6z$

Jetzt kann eingesetzt werden!

(II) in (I) …

Machen Sie weiter! Setzen Sie die umgeformte Gleichung (II) in (I) ein:

(I) $8x + 6z = 54$

(II) $3x + 6 = 3z \quad | \cdot 2$

$6x + 12 = 6z$

(II) in (I)

Lineare Gleichungen – Einsetzungsverfahren

Ⓘ	$8x + 6z = 54$		
Ⓘⓘ	$3x + 6 = 3z$		$\mid \cdot 2$
	$6x + 12 = 6z$		

Jetzt kann eingesetzt werden!

Ⓘⓘ in Ⓘ	$8x + 6x + 12 = 54$		
	$14x + 12$	$= 54$	$\mid -12$
	$14x$	$= 42$	$\mid : 14$
	$\mathbf{x}$	$\mathbf{= 3}$	
in Ⓘ	$8 \cdot 3 + 6z$	$= 54$	
	$24 + 6z$	$= 54$	$\mid -24$
	$6z$	$= 30$	$\mid : 6$
	$\mathbf{z}$	$\mathbf{= 5}$	

Probe:

($x = 3$; $z = 5$)

Gleichung Ⓘ

$8 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \stackrel{?}{=} 54$

$24 + 30 \stackrel{?}{=} 54$

$54 \stackrel{?}{=} 54$ ✔

Gleichung Ⓘⓘ

$3 \cdot 3 + 6 \stackrel{?}{=} 3 \cdot 5$

$9 + 6 \stackrel{?}{=} 15$

$15 \stackrel{?}{=} 15$ ✔

Lösen Sie jetzt diese Gleichungssysteme nach dem Einsetzungsverfahren!
Überlegen Sie vorher, ob Sie umformen müssen und welche Gleichung dazu die geeignete ist!

① Ⓘ $3x - 8y = 49$
Ⓘⓘ $5x + 2y = 5$

② Ⓘ $6a + b = 31$
Ⓘⓘ $4a + 2b = 14$

③ Ⓘ $\frac{y}{2} = 4x - 2$
Ⓘⓘ $\frac{y}{6} = x + 1$

④ Ⓘ $x^2 - xy = -20$
Ⓘⓘ $2 + y = x$

1 I $3x - 8y = 49$

II $5x + 2y = 5 \quad | \cdot 4$

$$\begin{array}{lll}
20x + 8y & = 20 & | -20x \\
8y & = 20 - 20x & | \cdot (-1) \\
-8y & = -20 + 20x & \\
\text{II in I}\quad 3x - 20 + 20x & = 49 & | +20 \\
23x & = 69 & | : 23 \\
\mathbf{x} & \mathbf{= 3} & \\
\text{in I}\quad 3 \cdot 3 - 8y & = 49 & \\
9 - 8y & = 49 & | -9 \\
-8y & = 40 & | : (-8) \\
\mathbf{y} & \mathbf{= -5} &
\end{array}$$

Probe:

(x = 3; y = –5)

Gleichung I		
$3 \cdot 3 - 8 \cdot (-5)$	$\stackrel{?}{=} 49$	
$9 - (-40)$	$\stackrel{?}{=} 49$	
$9 + 40$	$\stackrel{?}{=} 49$	
49	$\stackrel{?}{=} 49$	✔
Gleichung II		
$5 \cdot 3 + 2 \cdot (-5)$	$\stackrel{?}{=} 5$	
$15 - 10$	$\stackrel{?}{=} 5$	
5	$\stackrel{?}{=} 5$	✔

2 I $6a + b = 31$

II $4a + 2b = 14$

I umformen:

$6a + b = 31$

$b = 31 - 6a$

$$\begin{array}{lll}
\text{I in II}\quad 4a + 2(31 - 6a) & = 14 & \\
4a + 62 - 12a & = 14 & \\
-8a + 62 & = 14 & | -62 \\
-8a & = -48 & | : (-8) \\
\mathbf{a} & \mathbf{= 6} & \\
\text{in I}\quad 6 \cdot 6 + b & = 31 & \\
36 + b & = 31 & | -36 \\
\mathbf{b} & \mathbf{= -5} &
\end{array}$$

Probe:

(a = 6; b = –5)

Gleichung I		
$6 \cdot 6 + (-5)$	$\stackrel{?}{=} 31$	
$36 - 5$	$\stackrel{?}{=} 31$	
31	$\stackrel{?}{=} 31$	✔
Gleichung II		
$4 \cdot 6 + 2 \cdot (-5)$	$\stackrel{?}{=} 14$	
$24 + (-10)$	$\stackrel{?}{=} 14$	
$24 - 10$	$\stackrel{?}{=} 14$	
14	$\stackrel{?}{=} 14$	✔

③ Ⓘ $\frac{y}{2} = 4x - 2$

Ⓘⓘ $\frac{y}{6} = x + 1$

Ⓘ umformen:

$\frac{y}{2} = 4x - 2 \quad | \cdot 2$

$y = 8x - 4$

Ⓘⓘ umformen:

$\frac{y}{6} = x + 1 \quad | \cdot 6$

$y = 6x + 6$

Gleichsetzen:

Ⓘ = Ⓘⓘ $8x - 4 = 6x + 6 \quad | + 4$

$8x = 6x + 10 \quad | - 6x$

$2x = 10 \quad | : 2$

$\mathbf{x = 5}$

in Ⓘ $\frac{y}{2} = 4 \cdot 5 - 2$

$\frac{y}{2} = 18 \quad | \cdot 2$

$\mathbf{y = 36}$

Probe:
(x = 5; y = 36)

Gleichung Ⓘ

$\frac{36}{2} \stackrel{?}{=} 4 \cdot 5 - 2$

$18 \stackrel{?}{=} 20 - 2$

$18 \stackrel{?}{=} 18$ ✔

Gleichung Ⓘⓘ

$\frac{36}{6} \stackrel{?}{=} 5 + 1$

$6 \stackrel{?}{=} 6$ ✔

④ Ⓘ $x^2 - xy = -20$

Ⓘⓘ $2 + y = x$

Ⓘⓘ in Ⓘ $(2 + y)^2 - (2 + y)y = -20$

$4 + 4y + y^2 - (2y + y^2) = -20$

$4 + 4y + y^2 - 2y - y^2 = -20$

$4 + 2y = -20 \quad | - 4$

$2y = -24 \quad | : 2$

$\mathbf{y = -12}$

in Ⓘⓘ $2 + (-12) = x$

$2 - 12 = x$

$-10 = x$

$\mathbf{x = -10}$

Probe:

(x = –10; y = –12)

Gleichung Ⓘ

$(-10)^2 - (-10) \cdot (-12) \stackrel{?}{=} -20$

$100 - 120 \stackrel{?}{=} -20$

$-20 \stackrel{?}{=} -20$ ✔

Gleichung Ⓘⓘ

$2 + (-12) \stackrel{?}{=} -10$

$2 - 12 \stackrel{?}{=} -10$

$-10 \stackrel{?}{=} -10$ ✔

Lineare Gleichungen – Gleichsetzungsverfahren

Sehen Sie sich diese Gleichungen einmal an!

(I) $x = \mathbf{-3y - 1}$
(II) $x = \mathbf{y - 9}$

Durch Einsetzen einer Gleichung in die andere erhalten Sie den Ausdruck

(II) in (I) $\mathbf{y - 9} = \mathbf{-3y - 1}$

Sie sehen: In beiden Gleichungen ist dieselbe Variable (x) isoliert. Durch das Einsetzen werden die rechten Seiten beider Gleichungen gleichgesetzt. Dadurch kann die Variable y ausgerechnet werden.

Man nennt dieses Verfahren **Gleichsetzungsverfahren**. Es kann immer dann angewendet werden, wenn beide Gleichungen nach derselben Variable aufgelöst sind.

Es ist also im Prinzip nichts anderes als das Einsetzungsverfahren für Gleichungen mit der gleichen Lösungsvariablen!

Versuchen Sie es selbst! Nach dem Gleichsetzen der beiden Gleichungsseiten wird wie beim Einsetzungsverfahren ausgerechnet!

1 (I) $x = 7y - 5$
(II) $x = 4y + 1$

2 (I) $y = -2x + 12$
(II) $x + 3 = y$

① Ⅰ $x = 7y - 5$

Ⅱ $x = 4y + 1$

Ⅰ = Ⅱ

$$\begin{aligned} 7y - 5 &= 4y + 1 && | +5 \\ 7y &= 4y + 6 && | -4y \\ 3y &= 6 && | :3 \\ \mathbf{y} &\mathbf{= 2} \end{aligned}$$

in Ⅰ

$$\begin{aligned} x &= 7 \cdot 2 - 5 \\ x &= 14 - 5 \\ \mathbf{x} &\mathbf{= 9} \end{aligned}$$

Probe: ($x = 9$; $y = 2$)

Gleichung Ⅰ

$9 \stackrel{?}{=} 7 \cdot 2 - 5$

$9 \stackrel{?}{=} 14 - 5$

$9 \stackrel{?}{=} 9$ ✔

Gleichung Ⅱ

$9 \stackrel{?}{=} 4 \cdot 2 + 1$

$9 \stackrel{?}{=} 8 + 1$

$9 \stackrel{?}{=} 9$ ✔

② Ⅰ $y = -2x + 12$

Ⅱ $x + 3 = y$

Ⅰ = Ⅱ

$$\begin{aligned} x + 3 &= -2x + 12 && | -3 \\ x &= -2x + 9 && | +2x \\ 3x &= 9 && | :3 \\ \mathbf{x} &\mathbf{= 3} \end{aligned}$$

in Ⅱ

$$\begin{aligned} 3 + 3 &= y \\ \mathbf{y} &\mathbf{= 6} \end{aligned}$$

Probe:

($x = 3$; $y = 6$)

Gleichung Ⅰ

$6 \stackrel{?}{=} (-2) \cdot 3 + 12$

$6 \stackrel{?}{=} (-6) + 12$

$6 \stackrel{?}{=} 6$ ✔

Gleichung Ⅱ

$3 + 3 \stackrel{?}{=} 6$

$6 \stackrel{?}{=} 6$ ✔

Sie können das Gleichsetzungsverfahren auch anwenden, wenn in beiden Gleichungen ein Vielfaches derselben Variable isoliert ist:

Ⅰ $8a = \mathbf{2b - 6}$

Ⅱ $8a = \mathbf{-3b - 1}$

Ⅰ = Ⅱ $\mathbf{2b - 6 = -3b - 1}$

Rechnen Sie diese Aufgabe nach dem Gleichsetzungsverfahren aus:

Ⅰ $\frac{x}{3} = 6y - 3$

Ⅱ $\frac{x}{3} = 5 - 2y$

Lösungen von Seite 16

Ⅰ $\frac{x}{3} = 6y - 3$

Ⅱ $\frac{x}{3} = 5 - 2y$

Ⅰ = Ⅱ $6y - 3 = 5 - 2y \quad | + 2y$

$8y - 3 = 5 \quad | + 3$

$8y = 8 \quad | : 8$

$\mathbf{y = 1}$

in Ⅰ $\frac{x}{3} = 5 - 2 \cdot 1$

$\frac{x}{3} = 3 \quad | \cdot 3$

$\mathbf{x = 9}$

Probe:
(x = 9; y = 1)

Gleichung Ⅰ

$\frac{9}{3} \stackrel{?}{=} 6 \cdot 1 - 3$

$\frac{9}{3} \stackrel{?}{=} 3$

$3 \stackrel{?}{=} 3$ ✔

Gleichung Ⅱ

$\frac{9}{3} \stackrel{?}{=} 5 - 2 \cdot 1$

$\frac{9}{3} \stackrel{?}{=} 3$

$3 \stackrel{?}{=} 3$ ✔

Gönnen Sie sich eine kleine Verschnaufpause – Sie haben sie verdient!

Formen Sie Gleichungen, in denen nicht dieselbe Variable isoliert ist, nach einer Variablen um. Danach können Sie nach dem Gleichsetzungsverfahren vorgehen.

Beispiel: Ⓘ $x + y = 9$
ⒾⒾ $y - x = 5$

Wir entscheiden uns dafür, beide Gleichungen nach y aufzulösen:

Ⓘ	$x + y = 9$	$\mid -x$
	$y \quad = 9 - x$	
ⒾⒾ	$y - x = 5$	$\mid +x$
	$y \quad = 5 + x$	

Jetzt kann gleichgesetzt werden:

Ⓘ = ⒾⒾ	$5 + x = 9 - x$	$\mid -5$
	$x \quad = 4 - x$	$\mid +x$
	$2x \quad = 4$	$\mid :2$
	$\mathbf{x \quad = 2}$	

Wir setzen die Lösung für x in Ⓘ ein:

in Ⓘ	$2 + y = 9$	$\mid -2$
	$\mathbf{y \quad = 7}$	

Probe:
(x = 2; y = 7)

Gleichung Ⓘ

$2 + 7 \stackrel{?}{=} 9$
$9 \stackrel{?}{=} 9$ ✔

Gleichung ⒾⒾ

$7 - 2 \stackrel{?}{=} 5$
$5 \stackrel{?}{=} 5$ ✔

Genau genommen ist das Gleichsetzungsverfahren nur ein „Spezialfall" des Einsetzungsverfahrens. Man kann daher die Beispielaufgabe auch ausrechnen, indem nur eine Gleichung nach y aufgelöst wird und das Ergebnis in die andere Gleichung eingesetzt wird!

Bei Anwendung des Einsetzungsverfahren sparen Sie dabei einen Rechenschritt!

Betrachten Sie also das Gleichungssystem genau, bevor Sie sich für ein Verfahren entscheiden:

Wenn in beiden Gleichungen dieselbe Variable (oder ein Vielfaches) isoliert ist, können Sie gut das Gleichsetzungsverfahren anwenden.

Sie können es auch anwenden, wenn nur eine Gleichung nach einer Variablen aufgelöst werden muss!

In Zweifelsfällen sind Sie immer gut beraten, wenn Sie nach dem Einsetzungsverfahren vorgehen!

Lineare Gleichungen – Additionsverfahren

Jetzt lernen Sie ein drittes Verfahren kennen, mit dessen Hilfe man Gleichungssysteme lösen kann: Das so genannte **Additionsverfahren**, bei dem die Gleichungen addiert werden. Durch die Addition wird hierbei eine Variable eliminiert.

Wie aber geschieht das?

Wir addieren die folgenden Gleichungen (rechte Seite + rechte Seite = linke Seite + linke Seite)! Zum einfachen Rechnen werden die Gleichungen so untereinander geschrieben, dass gleiche Variablen untereinander stehen. Dann werden die einzelnen Summanden der zweiten Gleichung zu denen der ersten Gleichung addiert:

$$\begin{array}{lrrcr} \text{I} & 2x & +5y & = & 3 \\ & + & + & & + \\ \text{II} & x & -5y & = & 9 \\ \hline & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{I}+\text{II} & 3x & +0 & = & 12 \end{array}$$

Sie sehen, wir haben eine Gleichung erhalten, die nur noch die Variable x enthält. Wir lösen diese nach x auf und erhalten den Wert:

$$\begin{array}{lcl} 3x & = 12 & \mid :3 \\ \mathbf{x} & \mathbf{= 4} & \end{array}$$

Diesen Wert können wir in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen einsetzen und das Gleichungssystem wie gewohnt lösen:

$$\begin{array}{llcl} \text{in II} & 4-5y & =9 & \mid -4 \\ & -5y & =5 & \mid :(-5) \\ & \mathbf{y} & \mathbf{=-1} & \end{array}$$

Wir machen die **Probe:**

(x = 3; y = –1)

Gleichung I	Gleichung II
$2 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) \stackrel{?}{=} 3$	$4 - 5 \cdot (-1) \stackrel{?}{=} 9$
$8 - 5 \stackrel{?}{=} 3$	$4 + 5 \stackrel{?}{=} 9$
$3 \stackrel{?}{=} 3$ ✔	$9 \stackrel{?}{=} 9$ ✔

Warum darf man die Gleichungen einfach addieren?
Sie wissen, dass sich der Wert einer Gleichung nicht ändert, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung den gleichen Wert addiert. Genau das wird gemacht, wenn man zu einer Gleichung eine zweite addiert.
Denn da bei der zweiten Gleichung die linke Seite den gleichen Wert hat wie die rechte, addiert man also zur ersten Gleichung auf beiden Seiten den gleichen Wert!

Lernschritt

Übungen

Versuchen Sie, diese Gleichungssysteme nach dem Additionsverfahren zu lösen:

1. I $2x + 2y = -16$
   II $2x - 2y = 4$

2. I $7y - 3x = 6$
   II $3x + 2y = 3$

①

Ⅰ	$2x + 2y$	$= -16$	
Ⅱ	$2x - 2y$	$= 4$	
Ⅰ + Ⅱ	$4x + 0$	$= -12$	$\mid : 4$
	x	**= –3**	
in Ⅱ	$2 \cdot (-3) - 2y = 4$		
	$-6 - 2y$	$= 4$	$\mid + 6$
	$-2y$	$= 10$	$\mid : (-2)$
	y	**= –5**	

Probe:

$(x = -3;\ y = -5)$

Gleichung Ⅰ

$2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-5) \stackrel{?}{=} -16$

$-6 + (-10) \stackrel{?}{=} -16$

$-16 \stackrel{?}{=} -16$ ✔

Gleichung Ⅱ

$2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-5) \stackrel{?}{=} 4$

$-6 - (-10) \stackrel{?}{=} 4$

$-6 + 10 \stackrel{?}{=} 4$

$4 \stackrel{?}{=} 4$ ✔

②

Ⅰ $7y - 3x = 6$

Ⅱ $3x + 2y = 3$

Ⅱ umstellen: $2y + 3x = 3$

addieren:

Ⅰ	$7y - 3x = 6$		
Ⅱ	$2y + 3x = 3$		
Ⅰ + Ⅱ	$9y + 0$	$= 9$	$\mid : 9$
	y	**= 1**	
in Ⅱ	$3x + 2$	$= 3$	$\mid - 2$
	$3x$	$= 1$	$\mid : 3$
	x	$\mathbf{= \frac{1}{3}}$	

Probe:

$(x = \frac{1}{3};\ y = 1)$

Gleichung Ⅰ

$7 - 3 \cdot \frac{1}{3} \stackrel{?}{=} 6$

$7 - 1 \stackrel{?}{=} 6$

$6 \stackrel{?}{=} 6$ ✔

Gleichung Ⅱ

$3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \stackrel{?}{=} 3$

$1 + 2 \stackrel{?}{=} 3$

$3 \stackrel{?}{=} 3$ ✔

Lineare Gleichungen – Additionsverfahren

Natürlich erscheinen die wenigsten Gleichungen so, dass man sie gleich addieren kann.

Oft hilft hier das Vorgehen, das Sie auch schon beim Einsetzungsverfahren kennen gelernt haben: Die Multiplikation einer Gleichung, so dass eine Variable durch die anschließende Addition eliminiert werden kann!

Beispiel:

Ⓘ $2x - 3y = 7$
Ⓘⅈ $4x + 5y = -8$

Wenn Sie diese Gleichungen addieren, erhalten Sie wieder eine Gleichung mit zwei Variablen. Dies Ergebnis nützt zur Lösung des Gleichungssystems nichts!

Wenn Sie jedoch Gleichung I mit (– 2) multiplizieren, ergibt sich Folgendes:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & 2x - 3y & = & 7 \quad | \cdot (-2) \\ & -4x + 6y & = & -14 \\ \text{(II)} & 4x + 5y & = & -8 \end{array}$$

Jetzt können Sie addieren:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & -4x + 6y & = & -14 \\ \text{(II)} & 4x + 5y & = & -8 \\ \hline \text{(I)} + \text{(II)} & 0 + 11y & = & -22 \quad | : 11 \\ & \mathbf{y} & \mathbf{=} & \mathbf{-2} \end{array}$$

Mit diesem Wert wird nun wie gewohnt weitergerechnet. Da Sie die Ausrechnung bereits oft geübt haben, ersparen wir uns die detaillierte Vorrechnung und geben nur die Lösung an:

$$\left(\mathbf{x = \frac{1}{2};\ y = -2}\right)$$

Rechnen Sie nach und machen Sie die Probe, wenn Sie mögen!

Lernschritt

Manchmal müssen auch beide Gleichungen multipliziert werden, damit das Additionsverfahren angewendet werden kann:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 3x + 2y = 10 \\ \text{II} & 11x - 5y = 12 \end{array}$$

Am besten können Sie diese Aufgabe ausrechnen, wenn Sie Gleichung I mit 5 und Gleichung II mit 2 multiplizieren:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 3x + 2y = 10 & \mid \cdot 5 \\ & 15x + 10y = 50 & \\ \text{II} & 11x - 5y = 12 & \mid \cdot 2 \\ & 22x - 10y = 24 & \end{array}$$

Jetzt werden die Gleichungen addiert:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 15x + 10y = 50 & \\ \text{II} & 22x - 10y = 24 & \\ \hline \text{I} + \text{II} & 37x + 0 = 74 & \mid : 37 \\ & \mathbf{x = 2} & \end{array}$$

Wenn Sie wie gewohnt weiterrechnen, erhalten Sie die Lösung:
(x = 2; y = 2)

Übungen

Multiplizieren Sie beide Gleichungen und wenden Sie dann das Additionsverfahren an!

I $4x + 3y = 22$
II $7x - 4y = 57$

$$
\begin{array}{lll l}
\text{I} & 4x + 3y & = 22 & \mid \cdot 4 \\
\text{II} & 7x - 4y & = 57 & \mid \cdot 3 \\
\text{I} & 16x + 12y & = 88 & \\
\text{II} & 21x - 12y & = 171 & \\
\hline
\text{I} + \text{II} & 37x + 0 & = 259 & \\
 & \mathbf{x} & \mathbf{= 7} & \\
\text{in I} & 4 \cdot 7 + 3y & = 22 & \\
 & 28 + 3y & = 22 & \mid -28 \\
 & 3y & = -6 & \mid :3 \\
 & \mathbf{y} & \mathbf{= -2} &
\end{array}
$$

Probe:

$(x = 7;\ y = -2)$

Gleichung I

$$
\begin{array}{ll l}
4 \cdot 7 + 3 \cdot (-2) & \stackrel{?}{=} 22 & \\
28 + (-6) & \stackrel{?}{=} 22 & \\
28 - 6 & \stackrel{?}{=} 22 & \\
22 & \stackrel{?}{=} 22 & ✔
\end{array}
$$

Gleichung II

$$
\begin{array}{ll l}
7 \cdot 7 - 4 \cdot (-2) & \stackrel{?}{=} 57 & \\
49 - (-8) & \stackrel{?}{=} 57 & \\
49 + 8 & \stackrel{?}{=} 57 & \\
57 & \stackrel{?}{=} 57 & ✔
\end{array}
$$

Sie haben sicher bemerkt:

Die meisten Gleichungssysteme lassen sich mit jedem der vorgestellten Verfahren lösen. Das Einsetzungs-, das Gleichsetzungs- wie auch das Additionsverfahren erfordern nur unterschiedlichen Rechenaufwand.

Welche Methode Sie wählen, ist Ihnen und Ihrem „Gleichungsblick“, den Sie mit zunehmender Übung mehr und mehr bekommen, überlassen. Versuchen Sie, die für Sie einfachste Lösungsmethode zu finden.

Im Zweifelsfall kommen Sie immer mit dem Einsetzungsverfahren zum Ziel!

Mit diesen Erkenntnissen sind Sie nun am Ende dieses Lernprogramms angelangt!

Nehmen Sie sich Zeit für eine Pause und lösen Sie dann zur Kontrolle Ihrer Kenntnisse die Wiederholungsaufgaben auf der nächsten Seite!

Viel Erfolg!

Lösen Sie diese Aufgaben nach dem Verfahren, das Ihnen am günstigsten erscheint!

① Ⓘ $x + y = 3$
Ⓘ Ⓘ $y = -2x + 2$

② Ⓘ $2x - y - 8 = 0$
ⅠⅠ $2x - 2y - 6 = 0$

③ Ⓘ $60 - 3x = y$
ⅠⅠ $y = 2x$

④ Ⓘ $5x + 4y = 19$
ⅠⅠ $3x - 2y = 7$

⑤ Ⓘ $3x - 2y = -9$
ⅠⅠ $3x + 7y = 36$

Lösungen:

Wir geben die Lösung in dem Verfahren an, das am einfachsten erscheint. Sie können auch auf andere Art gerechnet haben! Zwischenschritte und Proben haben wir hier weggelassen.

① Einsetzungsverfahren:

Ⓘ	$x + y = 3$		
Ⓘ	$y = -2x + 2$		
Ⓘ in Ⓘ	$x + (-2x + 2) = 3$		
	$x - 2x + 2$	$= 3$	
	$\mathbf{x}$	$\mathbf{= -1}$	
in Ⓘ	$-1 + y$	$= 3$	$\mid +1$
	$\mathbf{y}$	$\mathbf{= 4}$	

② Einsetzungsverfahren:

Ⓘ	$2x - y - 8 = 0$	
	$2x = y + 8$	
Ⓘ	$2x - 2y - 6$	$= 0$
Ⓘ in Ⓘ	$y + 8 - 2y - 6$	$= 0$
	$\mathbf{y}$	$\mathbf{= 2}$
in Ⓘ	$2x - 2 - 8$	$= 0$
	$\mathbf{x}$	$\mathbf{= 5}$

③ Gleichsetzungsverfahren:

Ⓘ	$60 - 3x = y$	
Ⓘ	$y = 2x$	
Ⓘ = Ⓘ	$60 - 3x$	$= 2x$
	$\mathbf{x}$	$\mathbf{= 12}$
in Ⓘ	y	$= 2 \cdot 12$
	$\mathbf{y}$	$\mathbf{= 24}$

④ Additionsverfahren:

$$
\begin{array}{lll}
\text{I} & 5x + 4y & = 19 \\
\text{II} & 3x - 2y & = 7 \\
 & 6x - 4y & = 14 \\
\hline
\text{I} + \text{II} & 11x + 0 & = 33 \\
 & \mathbf{x} & \mathbf{= 3} \\
\text{in I} & 5 \cdot 3 + 4y & = 19 \\
 & 15 + 4y & = 19 \\
 & \mathbf{y} & \mathbf{= 1}
\end{array}
$$

⑤ Gleichsetzungsverfahren:

$$
\begin{array}{lll}
\text{I} & 3x - 2y = -9 & \\
 & 3x = -9 + 2y & \\
\text{II} & 3x + 7y = 36 & \\
 & 3x = 36 - 7y & \\
\text{I} = \text{II} & -9 + 2y & = 36 - 7y \\
 & \mathbf{y} & \mathbf{= 5} \\
\text{in I} & 3x - 2 \cdot 5 = -9 & \\
 & \mathbf{x} & = \mathbf{\frac{1}{3}}
\end{array}
$$